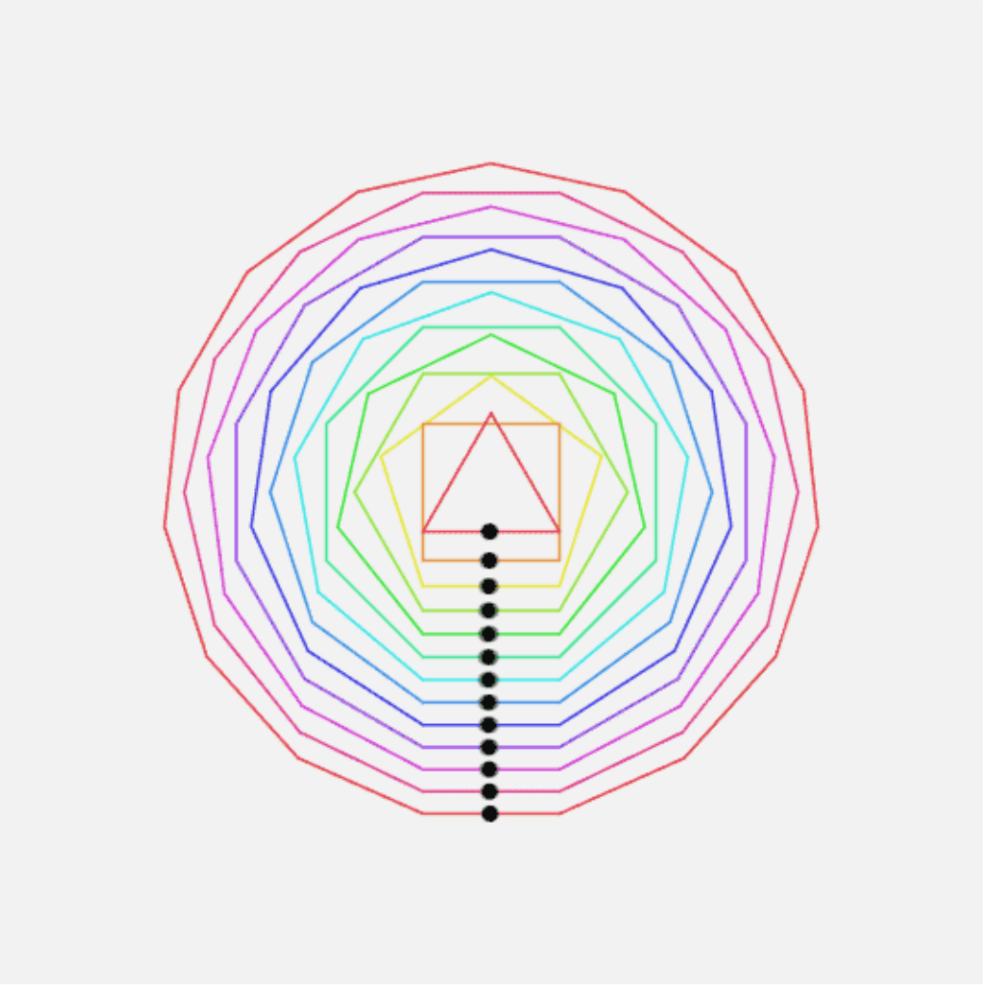
PITAGORAS
ACADEMIA

GEOMETRÍA

Profesor:
Marco Almerco

POLÍGONOS



POLÍGONOS

TEMA 06: POLÍGONOS

DEFINICIONES

CLASIFICACIÓN DE LOS POLÍGONOS

PROPIEDADES PARA POLÍGONOS CONVEXOS

DEFINICIÓN

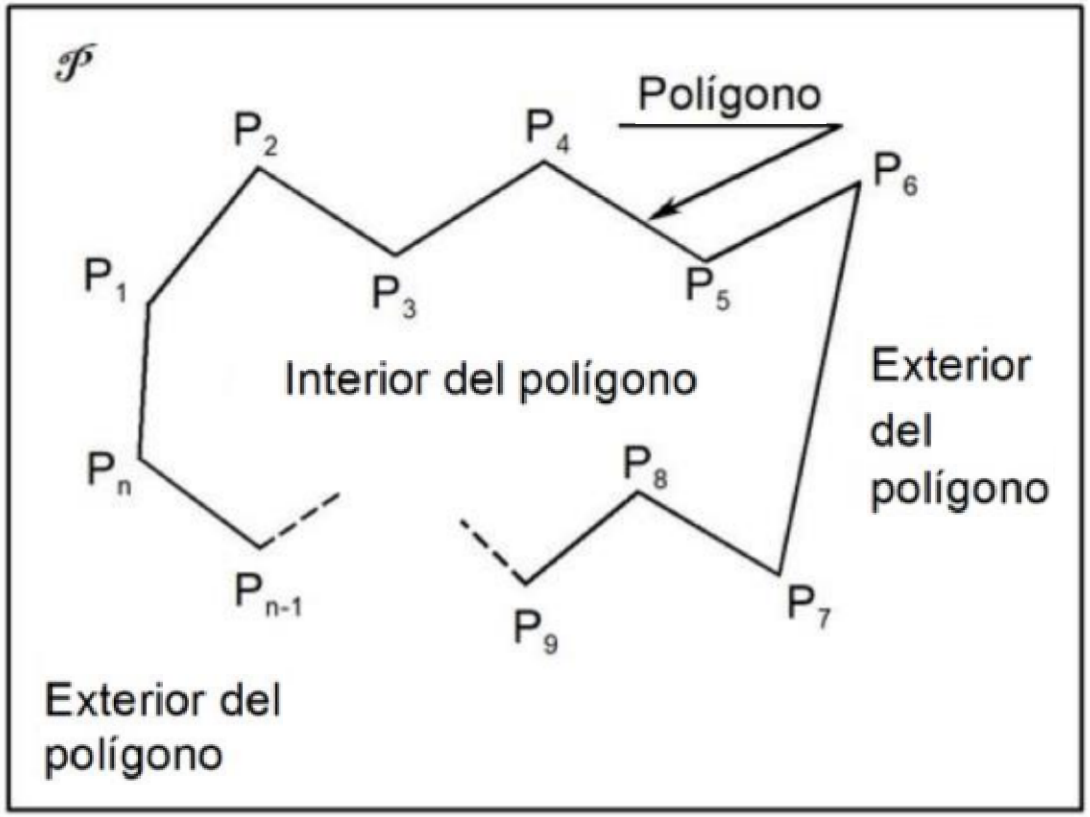
Sean $P_1, P_2, \ldots, P_n$ una sucesión de n puntos distintos de un plano $\mathcal{P}$ con $n \geq 3$ y sean los n segmentos $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}, \ldots, \overline{P_{n-1}P_n}, \overline{P_nP_1}$ tales que:

1) Ningún par de segmentos se intersecan, salvo en sus extremos.

2) Ningún par de segmentos con un extremo común son colineales.

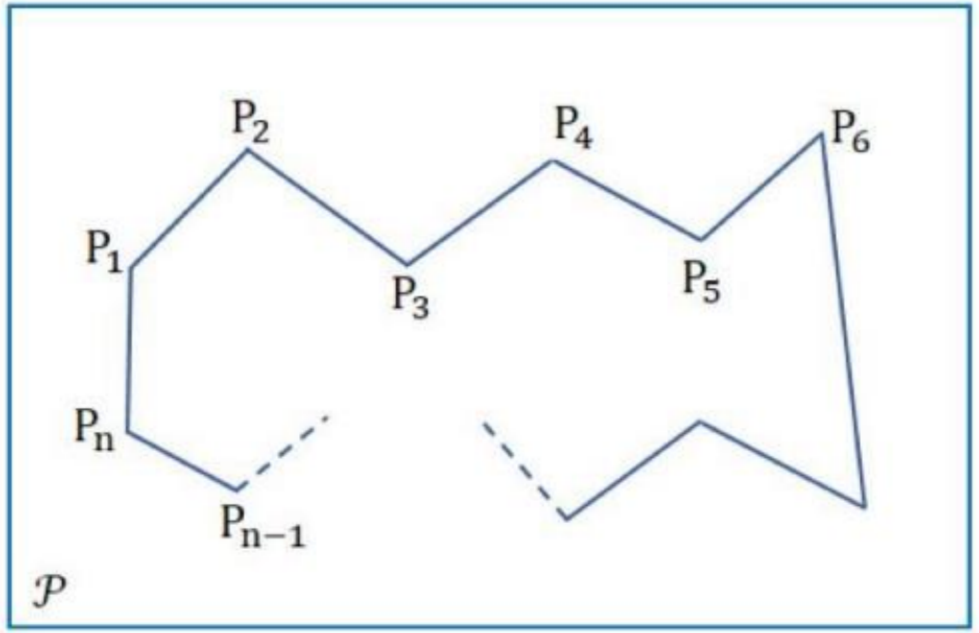
Entonces, la unión de los n segmentos se llama polígono.

En la figura se tiene el polígono $P_1P_2P_3 \ldots P_{n-1}P_n$



El polígono separa los puntos de un plano $\mathcal{P}$ en tres subconjuntos: El exterior del polígono, el propio polígono y el interior del polígono.

ELEMENTOS



Los puntos $P_1, P_2, \ldots, P_n$ son los vértices del polígono.

Los segmentos $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \ldots, \overline{P_{n-1}P_n}, \overline{P_nP_1}$ son los lados del polígono.

Dos lados que se intersecan se llaman lados consecutivos.

Dos lados consecutivos determinan el ángulo.

Los ángulos $\angle P_nP_1P_2, \angle P_1P_2P_3, \ldots, \angle P_{n-1}P_nP_1$ son los ángulos del polígono.

La suma de las longitudes de los lados se llama perímetro del polígono y se denota: 2p.

Nota:

En todo polígono el número de lados es igual al número de vértices e igual al número de ángulos.

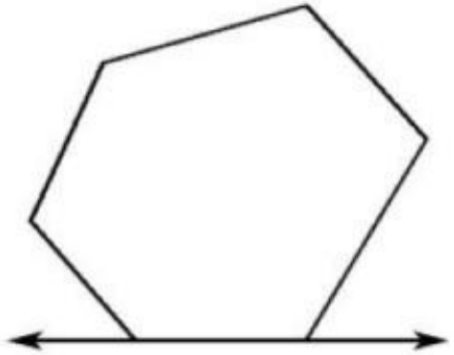
DEFINICIONES

Definiciones:

Un polígono se denomina polígono convexo si su interior es un conjunto convexo.

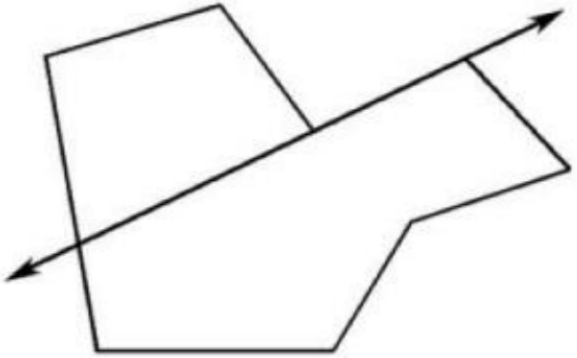
Además si un polígono es convexo, entonces el polígono unido con su interior, forma un conjunto convexo denominado región poligonal convexa.

Polígono convexo



Un polígono es no convexo si su interior es un conjunto no convexo.

Polígono no convexo



También se dice que un polígono es convexo si al trazar la recta que contiene a uno cualquiera de sus lados, uno de los semiplanos determinados por la recta contiene a todos los puntos del polígono.

CLASIFICACIÓN

Según el número de lados, un polígono se llama:

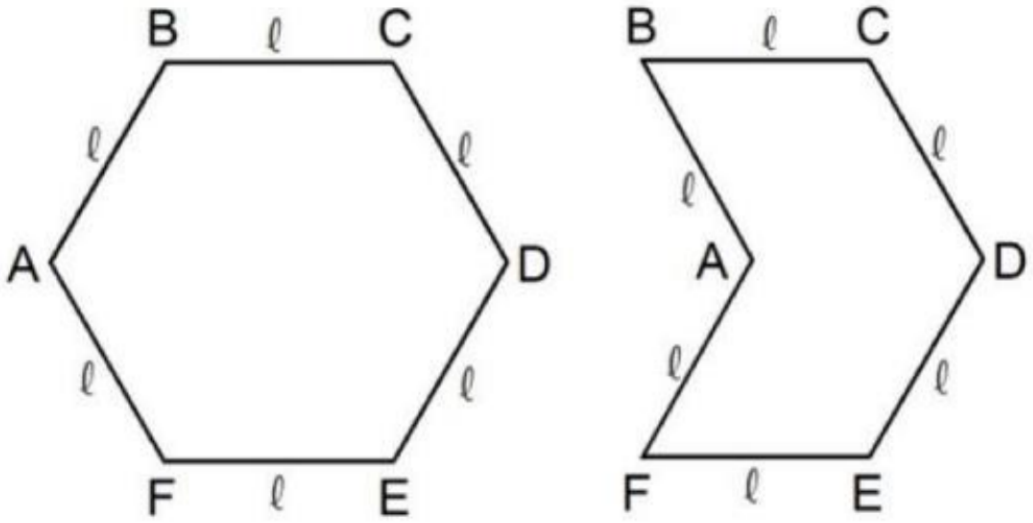
Triángulo	3	lados
Cuadrilátero	4	lados
Pentágono	5	lados
Hexágono	6	lados
Heptágono	7	lados
Octógono	8	lados
Nonágono (o Eneágono)	9	lados
Decágono	10	lados
Endecágono (o Undecágono)	11	lados
Dodecágono	12	lados
Pentadecágono	15	lados
Icoságono	20	lados

Los demás polígonos no tienen nombre especial, se les menciona según su número de lados. Por ejemplo, polígono de 17 lados.

CLASIFICACIÓN:

a) Polígono Equilátero

Es aquel polígono en el cual todos sus lados son congruentes.



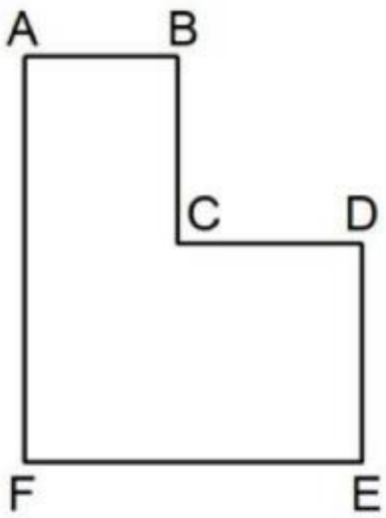
$$\text{Perímetro} = n.\,(\text{medida del lado})$$

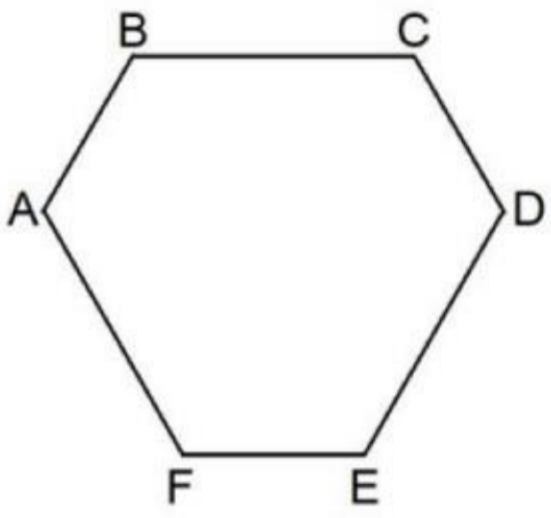
Donde n es el número de lados del polígono.

CLASIFICACIÓN

b) Polígono Equiángulo

Es aquel polígono en el cual todos sus ángulos son congruentes.

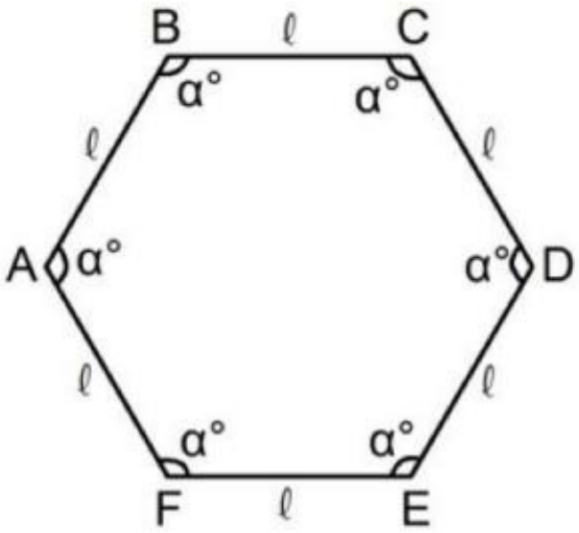




$\angle A \cong \angle B \cong \angle C \cong \angle D \cong \angle E \cong \angle F$

c) Polígono Regular

Es aquel polígono convexo, que es equiángulo y equilátero a la vez.



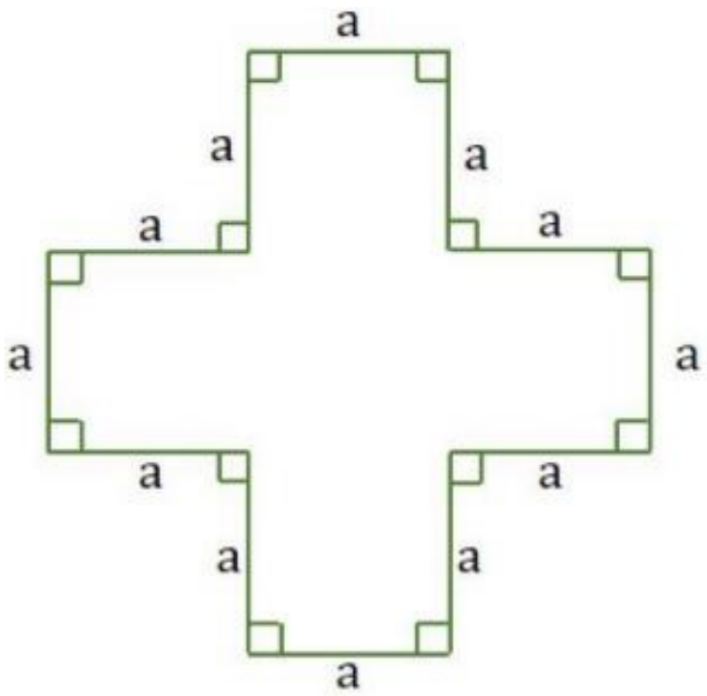
$\angle A \cong \angle B \cong \angle C \cong \angle D \cong \angle E \cong \angle F$

$AB = BC = CD = DE = EF = FA$

CLASIFICACIÓN

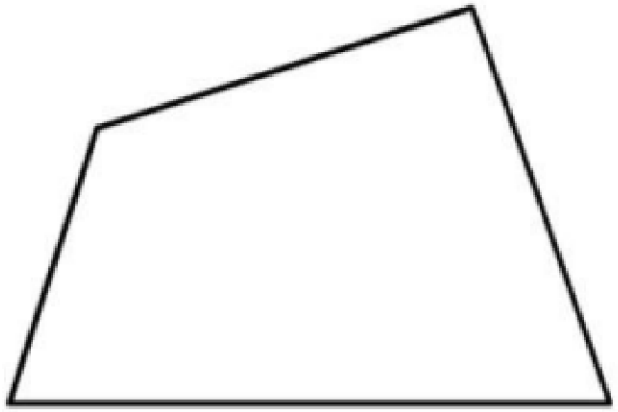
NOTA:

Existen polígonos equiángulos y equiláteros a la vez, que no son regulares.



d) Polígono Irregular

Es aquel polígono que no es regular.



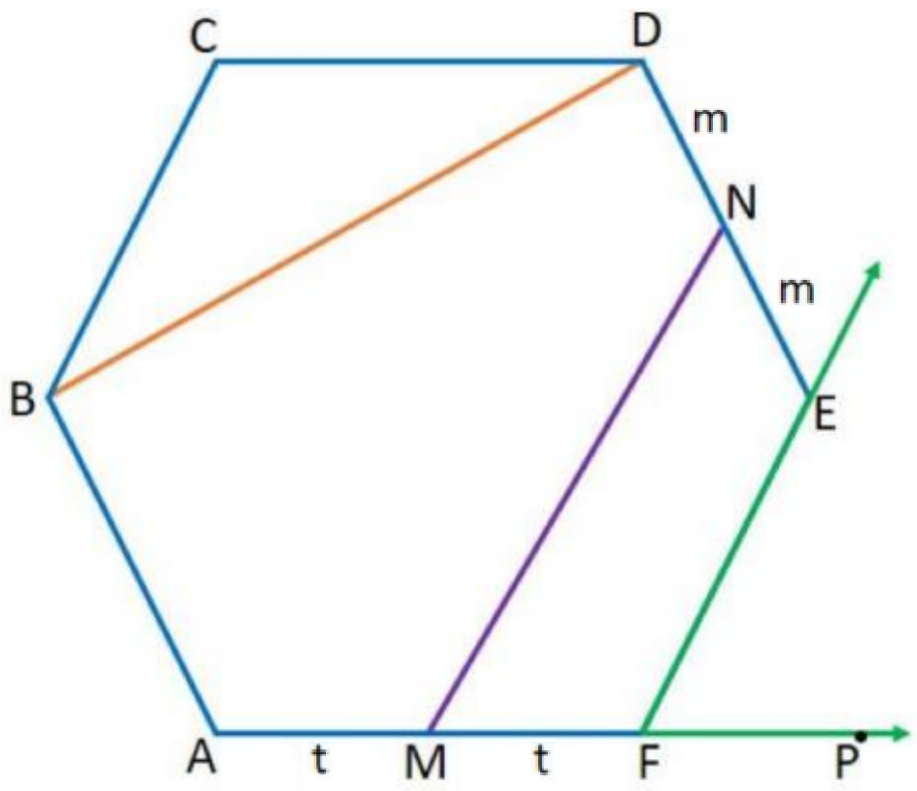
ELEMENTOS

Definiciones

Un segmento cuyos extremos son dos vértices no consecutivos de un polígono convexo se llama diagonal del polígono.

El segmento cuyos extremos son los puntos medios de dos lados cualesquiera de un polígono convexo se llama diagonal media del polígono.

El ángulo externo de un polígono convexo es el ángulo adyacente suplementario a un ángulo del polígono, es decir, que éstos dos ángulos forman un par lineal.



Diagonal: $\overline{BD}$

Diagonal Media: $\overline{MN}$

Ángulo exterior: $\angle EFP$

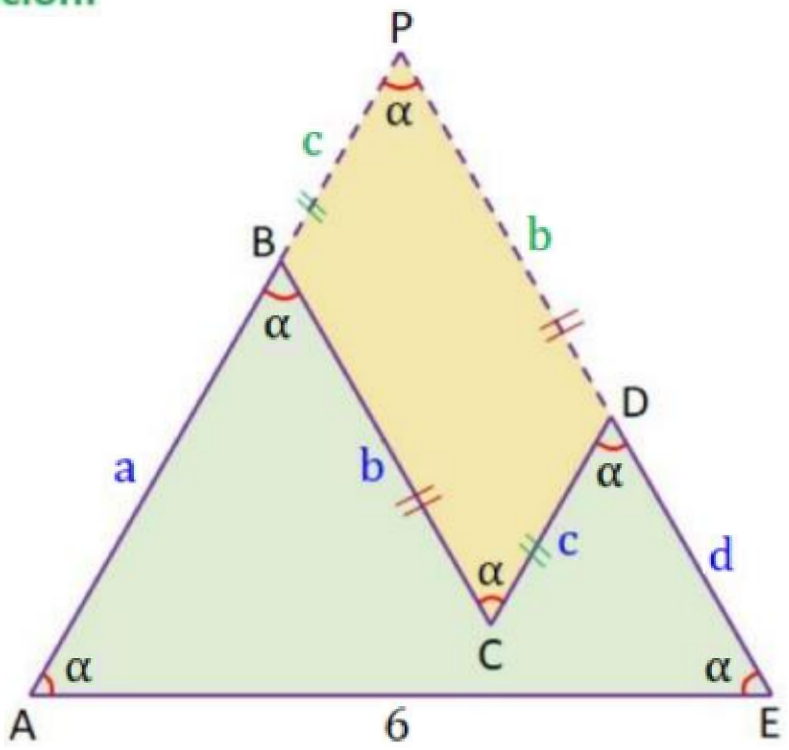
EJEMPLO

Ejemplo

Calcular el perímetro de un pentágono equiángulo no convexo, si su mayor lado mide 6.

A) 9 B) 12 C) 15
D) 18 E) 30

Resolución:



Dato: ABCDE es un pentágono equiángulo no convexo

El lado mayor mide 6

Se pide: $\text{Perímetro} = x$

$$\rightarrow x = a + b + c + d + 6$$

Prolongamos $\overline{AB}$ y $\overline{ED}$ hasta intersecarse en el punto P, luego se observa:

$$\overline{BP} \parallel \overline{CD} \quad y \quad \overline{CB} \parallel \overline{DP}$$

Es decir BPDC es un paralelogramo, entonces:

$$BC = PD = b,\ CD = BP = c \ \ y \ \ m\angle C = m\angle P = \alpha$$

ΔAPE: Equilátero

$$\rightarrow a + c = 6 = b + d$$

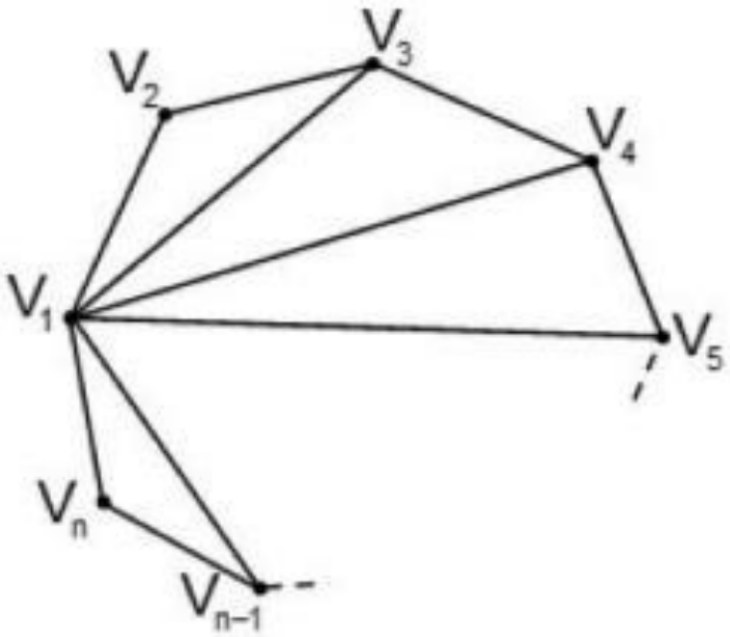
Finalmente:

$$x = a + b + c + d + 6$$

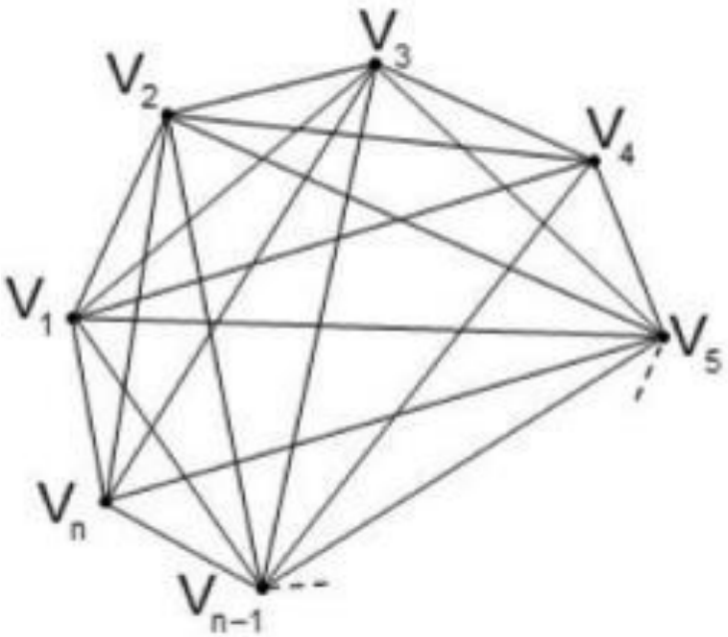
$$\therefore x = 18$$

TEOREMAS PARA TODO POLÍGONO CONVEXO

01. En todo polígono de n lados el número de diagonales trazados desde un solo vértice es (n-3).



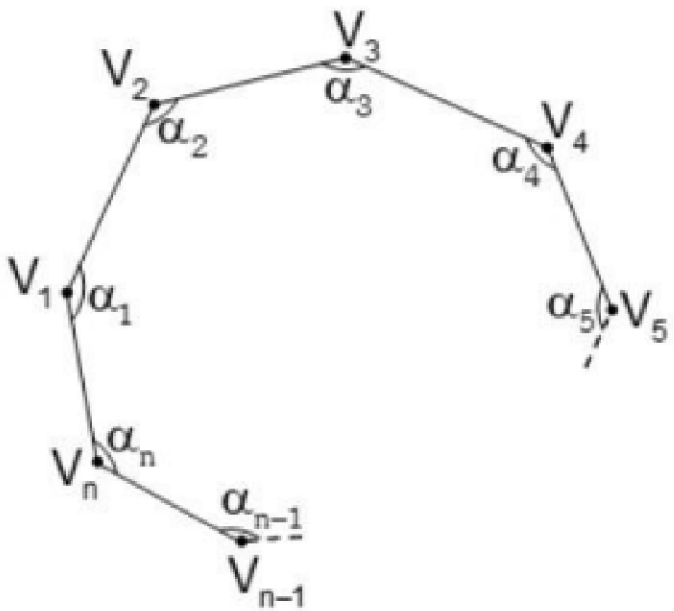
02. En todo polígono de n lados el número total de diagonales es $\frac{n(n-3)}{2}$.



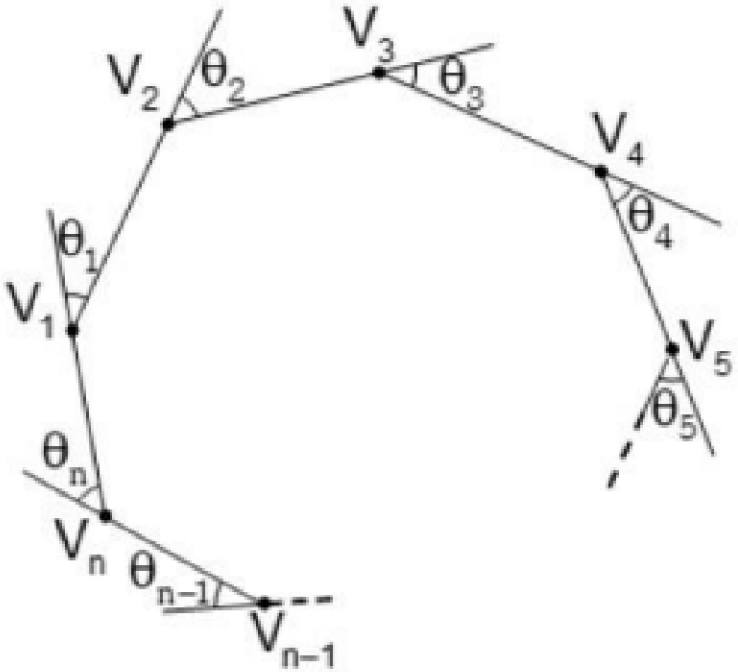
TEOREMAS PARA TODO POLÍGONO CONVEXO

03. En todo polígono convexo de n lados el número de triángulos determinados al trazar las diagonales desde un solo vértice es (n-2).

04. En todo polígono convexo de n lados, la suma de las medidas de los ángulos internos es igual a 180(n-2).

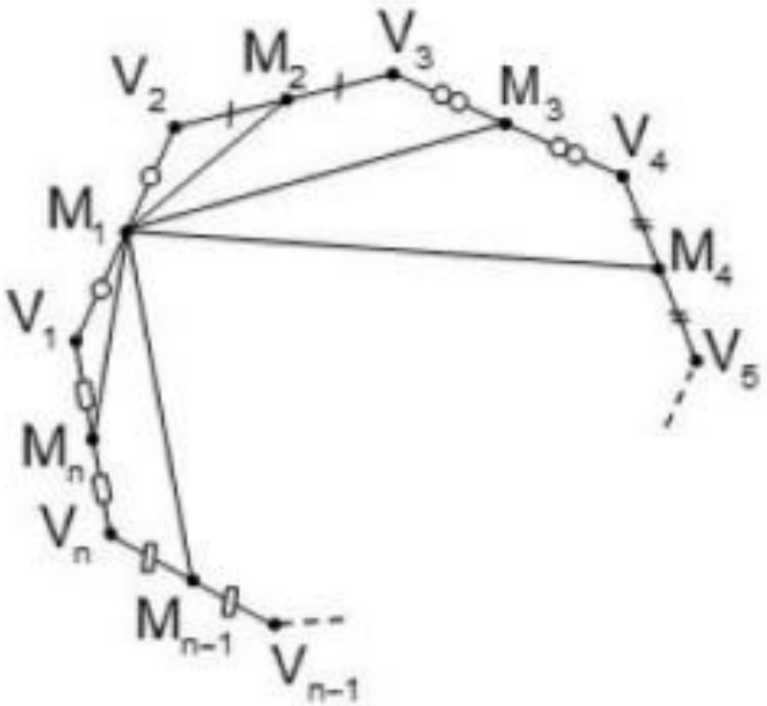


05. En todo polígono convexo la suma de las medidas de los ángulos externos considerados uno por vértice es igual a 360.

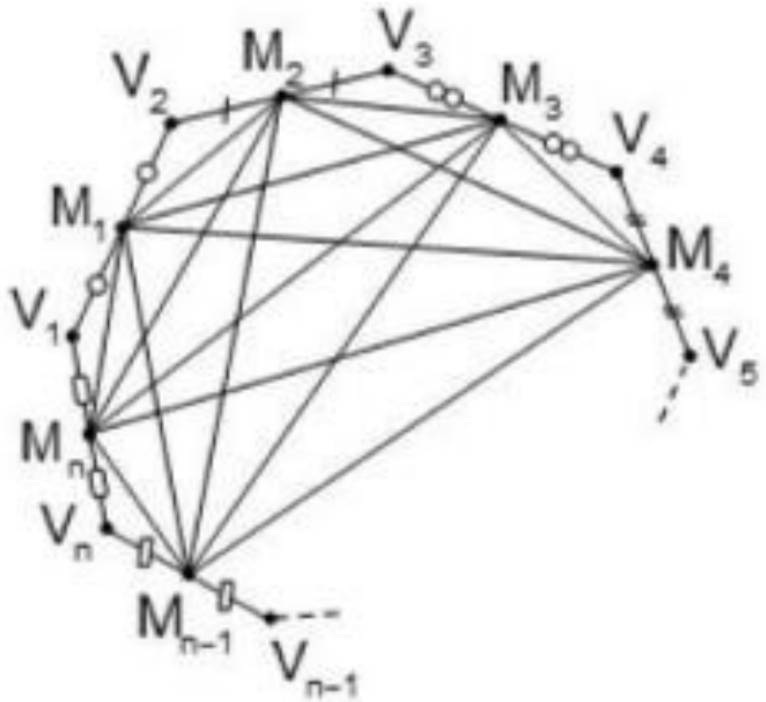


TEOREMAS PARA TODO POLÍGONO CONVEXO

06. En todo polígono convexo de n lados el número de diagonales medias trazadas desde un solo lado es (n-1).

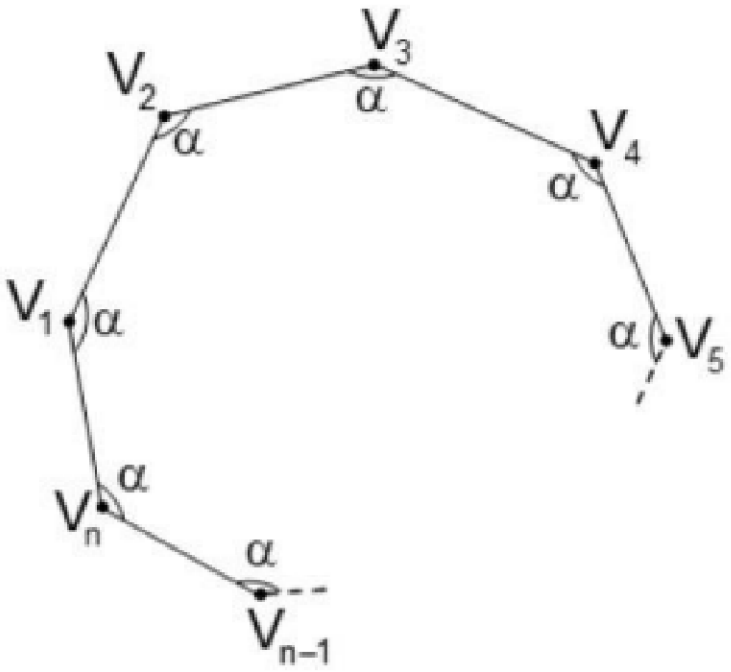


07. En todo polígono de n lados el número total de diagonales medias es $\frac{n(n-1)}{2}$.

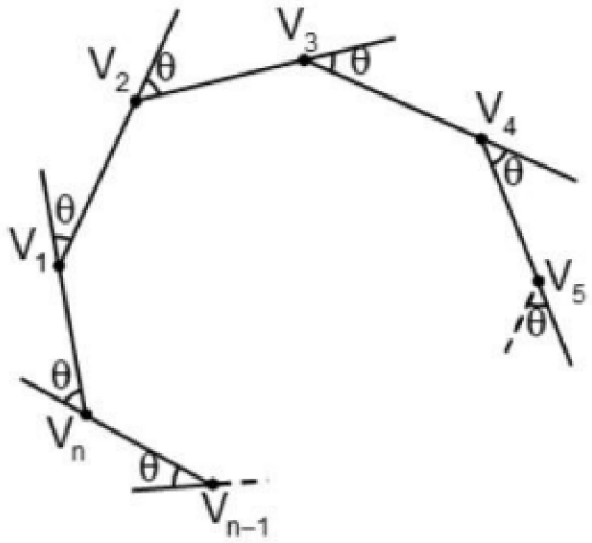


TEOREMAS PARA TODO POLÍGONO CONVEXO

08. En todo polígono regular o equiángulo (convexo) de n lados la medida de un ángulo interno es igual a $\frac{180(n-2)}{n}$.



09. En todo polígono regular o equiángulo (convexo) de n lados la medida de un ángulo externo es igual a $\frac{360}{n}$.



10. En todo polígono regular de n lados la medida de un ángulo central es igual a $\frac{360}{n}$.

11. En todo polígono regular la suma de las medidas de los ángulos centrales es 360.

EJEMPLOS

Ejemplo

Calcular el número de lados de un polígono equiángulo convexo, si la medida del ángulo interno es igual a cinco veces la medida del ángulo externo.

A) 9 B) 10 C) 12
D) 15 E) 8

Resolución:

Sea n el número de lados del polígono.
Se pide: n

Dato: $m\angle Interno = 5(m\angle Externo)$

$$\frac{180(n-2)}{n} = 5\left(\frac{360}{n}\right)$$

$$n - 2 = 5(2)$$

$$\therefore n = 12$$

Ejemplo

Si en un polígono convexo se duplica el número de lados, entonces su número de diagonales se sextuplica. Calcular la suma de las medidas de sus ángulos internos.

A) 900 B) 1800 C) 720
D) 1440 E) 540

Resolución:

Sea n el número de lados del polígono.
Se pide: $S_i = 180(n - 2)$

Polígono 1	Polígono 2
# de lados=n	# de lados=2n
$D_1 = \frac{n(n-3)}{2}$	$D_2 = \frac{2n(2n-3)}{2}$

Por dato: $D_2 = 6(D_1)$

Reemplazando: $\frac{2n(2n-3)}{2} = 6\left(\frac{n(n-3)}{2}\right)$

$$\rightarrow n = 6$$

Finalmente: $S_i = 180(6-2)$

$$\therefore S_i = 720$$

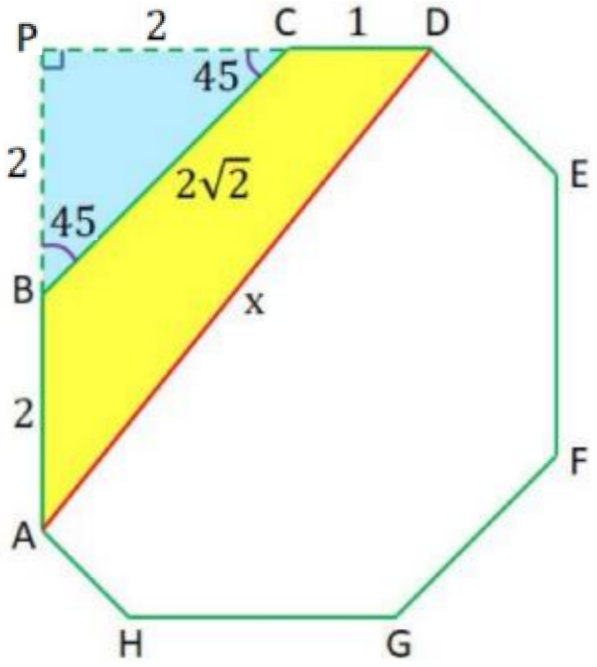
EJEMPLOS

Ejemplo

Se tiene un octágono convexo y equiángulo ABCDEFGH, tal que: AB=2, BC=$2\sqrt{2}$ y CD=1. Calcular AD.

A) 2 B) $4\sqrt{2}$ C) 5
D) 4 E) 6

Resolución:



Al prolongar los lados $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$, hasta cortarse en el punto P, se tiene: $BP = PC = 2$

Finalmente en ΔAPD:

$$\therefore x = 5$$

Ejemplo

Si el número de lados de un polígono disminuye en 2, el número de diagonales disminuye en 15. ¿Cuántos lados tiene el polígono?

Resolución:

Se pide: n

	Polígono 1	Polígono 2
N° de lados	n	n - 2
D	$\frac{n(n-3)}{2}$	$\frac{(n-2)[(n-2)-3)]}{2}$

Del dato: $D_1 - D_2 = 15$

$$\frac{n(n-3)}{2} - \frac{(n-2)[(n-2)-3)]}{2} = 15$$

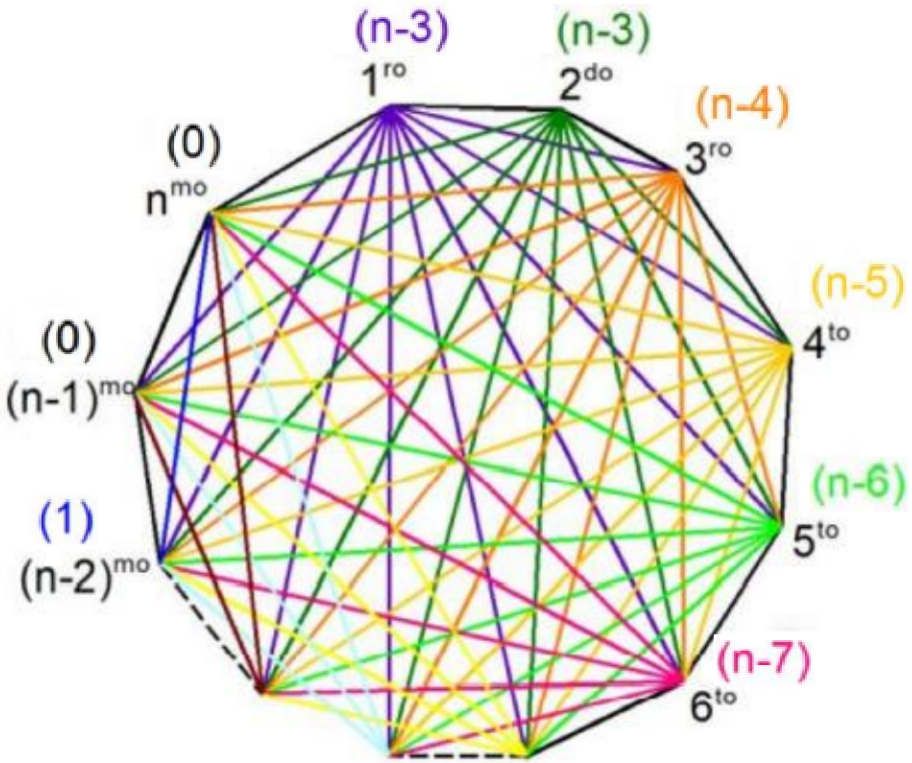
$$(n^2 - 3n) - (n^2 - 7n + 10) = 30$$

$$4n - 10 = 30$$

$$\therefore n = 10$$

TEOREMAS PARA TODO POLÍGONO CONVEXO

NÚMERO DE DIAGONALES TRAZADAS DESDE VARIOS VÉRTICES CONSECUTIVOS



El gráfico muestra el vértice considerado y en la parte superior el número de diagonales que se pueden trazar solo desde ese vértice. Si queremos encontrar el número de diagonales que se pueden trazar desde varios vértices consecutivos, bastará con sumar los números de diagonales correspondientes a los vértices considerados. Por ejemplo, calculemos el número de diagonales trazadas desde cuatro vértices consecutivos, entonces:

$$n°d_{(4)} = (n-3) + (n-3) + (n-4) + (n-5)$$

$$n°d_{(4)} = 4n - 15$$

TEOREMAS PARA TODO POLÍGONO CONVEXO

TEOREMA

Número de diagonales trazadas desde "v" vértices consecutivos en un polígono de n lados ($n°d_{(v)}$):

$$n°d_{(v)} = nv - \frac{(v+1)(v+2)}{2}$$

$$\forall\, v < n$$

DEMOSTRACIÓN

$$n°d_{(v)} = (n-3) + (n-3) + (n-4) + \cdots + (n-(v+1))$$

$$n°d_{(v)} = \underbrace{(n + n + \cdots + n)}_{\text{"v" veces}} - (3 + 3 + 4 + \cdots + (v+1))$$

$$n°d_{(v)} = (nv) - (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (v+1))$$

$$\therefore n°d_{(v)} = nv - \frac{(v+1)(v+2)}{2}$$

TEOREMA

Número de diagonales medias trazadas desde "k" lados consecutivos en un polígono de n lados ($n°dm_{(k)}$):

$$n°dm_{(k)} = nk - \frac{k(k+1)}{2}$$

EJEMPLO

Ejemplo

En un polígono regular de n lados $(n \geq 3)$, desde cuatro vértices consecutivos se trazan en total 105 diagonales. Calcular la medida de un ángulo externo del polígono.

A) 10 B) 24 C) 15
D) 18 E) 12

Resolución:

Dato: $n^{o}d_4 = 105$

$$n^{o}d_{(4)} = (n-3) + (n-3) + (n-4) + (n-5)$$

$$\rightarrow 4n - 15 = 105$$

$$\rightarrow n = 30$$

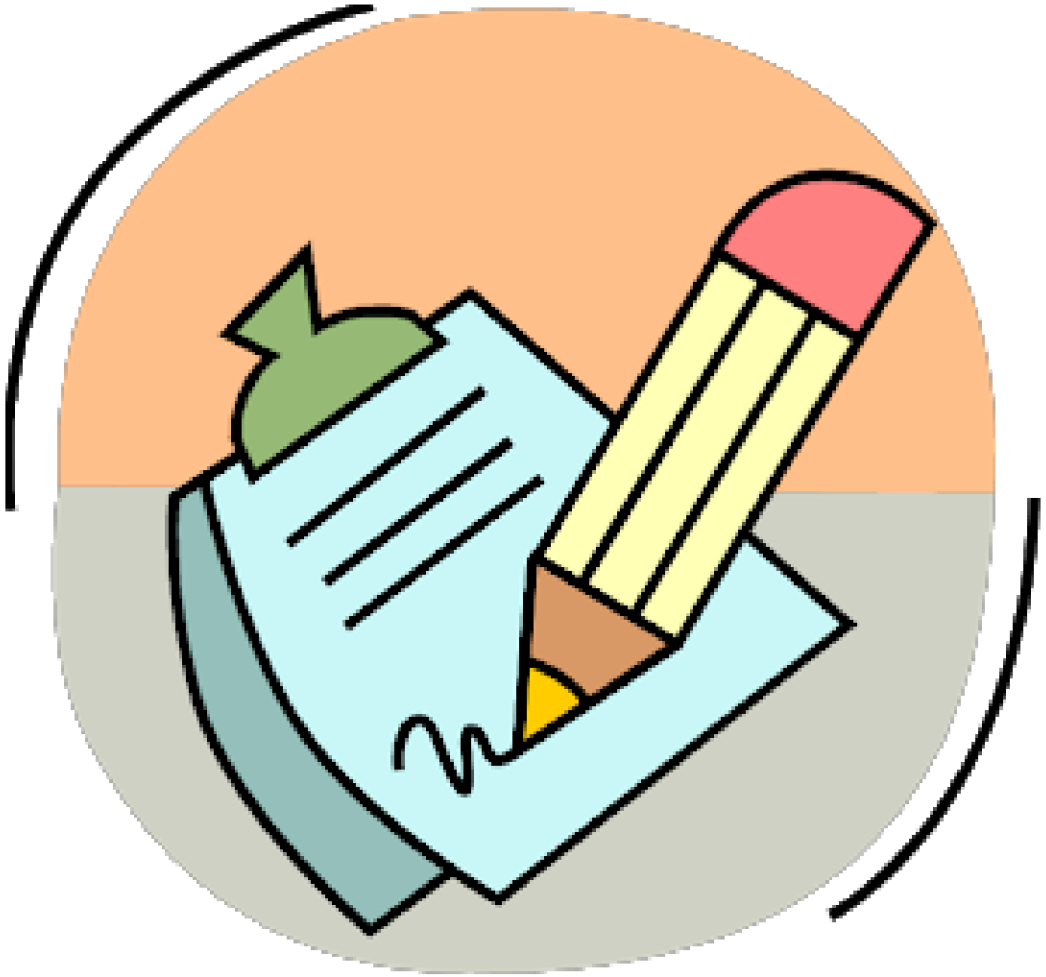
Se pide: $m\angle exterior = \dfrac{360}{n}$

$$\therefore m\angle exterior = \frac{360}{30} = 12$$

- Otra forma:

$$n^{o}d_{(v)} = nv - \frac{(v+1)(v+2)}{2}$$

MOMENTO DE PRACTICAR



PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

EJERCICIOS

01. En un polígono regular, los $\frac{5}{2}$ de la medida del ángulo interior es igual al cuadrado de la medida de su ángulo exterior. Halle el número de lados de dicho polígono.

A) 10 B) 12 C) 15
D) 18 E) 20

Resolución:

Sea n el número de lados, se pide: n

Dato:

$$\frac{5}{2}(m\angle Interior) = (m\angle Exterior)^2$$

$$\frac{5}{2}\left(\frac{180(n-2)}{n}\right) = \left(\frac{360}{n}\right)^2$$

$$\therefore n = 18$$

02. En un polígono regular de n lados, al disminuir su número de lados en 4, resulta otro polígono regular donde cada ángulo externo aumentó en 3°. Calcule n.

A) 18 B) 20 C) 22
D) 24 E) 30

Resolución:

Se tiene un polígono de n lados.

Se pide: n

	Polígono 1	Polígono 2
N° de lados	n	n - 4
m∠Exterior	$\frac{360}{n}$	$\frac{360}{n-4}$

Por dato: $m\angle Exterior_{(2)} - m\angle Exterior_{(1)} = 3$

$$\frac{360}{n-4} - \frac{360}{n} = 3$$

$$480 = (n-4).n$$

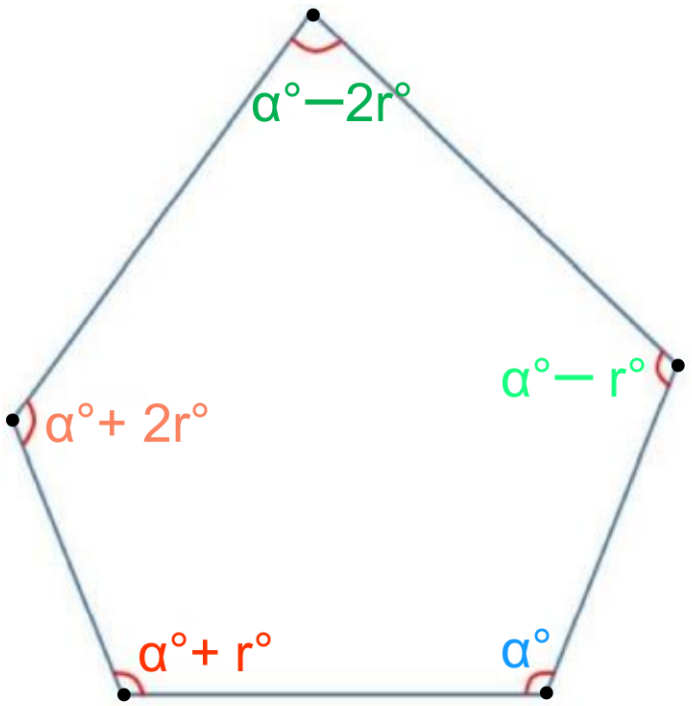
$$\therefore n = 24$$

EJERCICIOS

03. Las medidas de los ángulos internos de un pentágono convexo están en progresión aritmética, calcule el mayor valor entero de la razón de la progresión.

A) 25 B) 27 C) 32
D) 35 E) 36

Resolución:



Se pide: $r_{\text{Máx.ent.}}$

Por suma de ángulos internos:

$$\alpha - 2r + \alpha - r + \alpha + \alpha + r + \alpha + 2r = 180(5-2)$$

De donde: $\alpha = 108$

Como el polígono es convexo, entonces:

$$\alpha + 2r < 180$$

$$108 + 2r < 180$$

$$\rightarrow r < 36$$

$$\therefore r_{\text{Máx.ent.}} = 35$$

EJERCICIOS

04. Si el número de lados de un polígono regular aumenta en 10, cada ángulo del nuevo polígono es 3° mayor que cada ángulo del original. ¿Cuántos lados tiene el polígono original?

A) 15 B) 20 C) 25
D) 30 E) 40

Resolución:

Consideremos un polígono inicial de n lados.

Se pide: n

	Polígono 1	Polígono 2
N° de lados	n	n + 10
m∠Interior	$\frac{180(n-2)}{n}$	$\frac{180(n+10-2)}{(n+10)}$

Por dato: $m\angle Interior_{(2)} - m\angle Interior_{(1)} = 3$

$$\frac{180(n+10-2)}{(n+10)} - \frac{180(n-2)}{n} = 3$$

$$180.\left(\frac{n+8}{n+10} - \frac{n-2}{n}\right) = 3$$

$$\frac{(n+8).n-(n+10).(n-2)}{(n+10)n} = \frac{3}{180}$$

$$1200 = (n+10).n$$

$\therefore n = 30$

EJERCICIOS

05. En un polígono equilátero se sabe que desde 5 vértices consecutivos se pueden trazar 29 diagonales. Calcular el perímetro de dicho polígono, si uno de sus lados mide 3.

A) 34 B) 30 C) 27
D) 40 E) 10

Resolución:

Sabemos: $D_v = nv - \dfrac{(v+1)(v+2)}{2}$ $\quad v < n$

Por dato: $v = 5\,;\ D_{(5)} = 29$

Reemplazando:

$$29 = (n)(5) - \frac{(5+1)(5+2)}{2}$$

$$29 = 5n - 21$$

$$\rightarrow n = 10$$

Finalmente, por dato el lado mide 3, luego el perímetro será:

$$\text{Perímetro} = (10)(3)$$

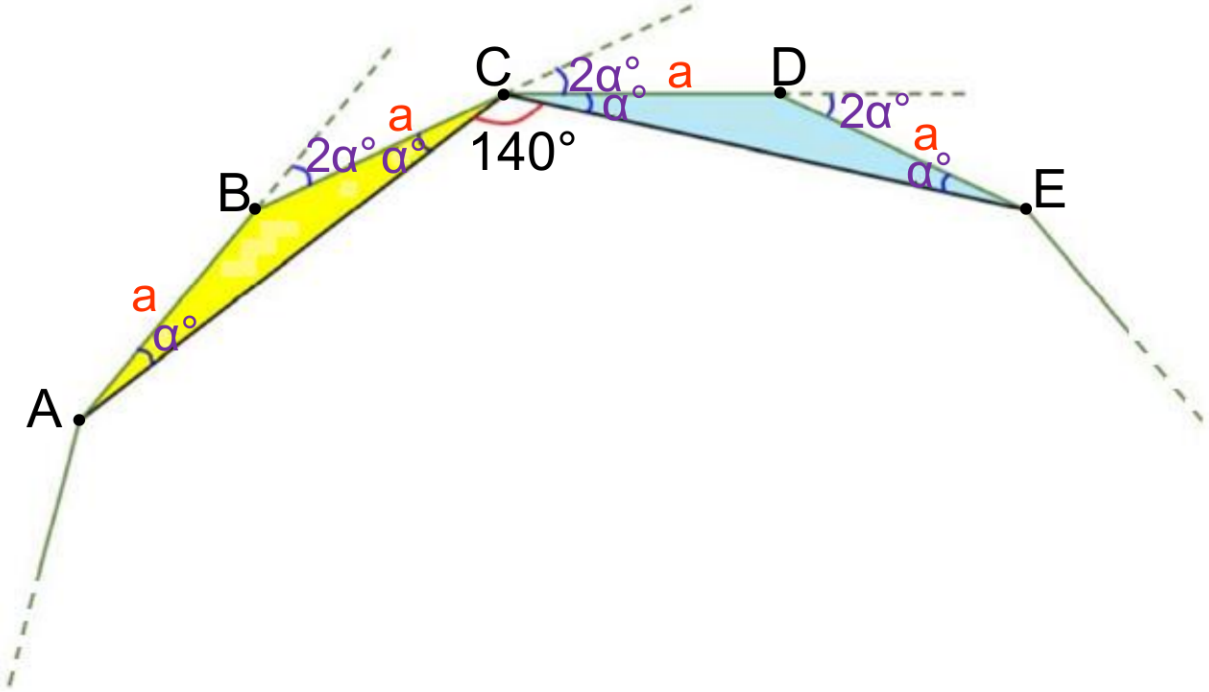
$$\therefore \text{Perímetro} = 30$$

EJERCICIOS

06. En un polígono regular ABCDE ... , de n lados, se cumple que: m∠ACE=140. Calcular el número de diagonales del polígono.

A) 153 B) 146 C) 156
D) 135 E) 170

Resolución:



Se pide: $D = \dfrac{n(n-3)}{2}$

Dato: El polígono es regular.

Se observa:

ΔABC (isósceles): $m\angle BAC = \alpha = m\angle BCA$

$\rightarrow m\angle Exterior = 2\alpha$

ΔCDE (isósceles): $m\angle DCE = \alpha = m\angle DEC$

En el vértice C:

$$\alpha + 140 + \alpha + 2\alpha = 180$$
$$\rightarrow \alpha = 10$$

Luego: $m\angle Exterior = 2\alpha = 20$

$$\rightarrow \frac{360}{n} = 20$$
$$\rightarrow n = 18$$

Por último: $D = \dfrac{18(18-3)}{2}$

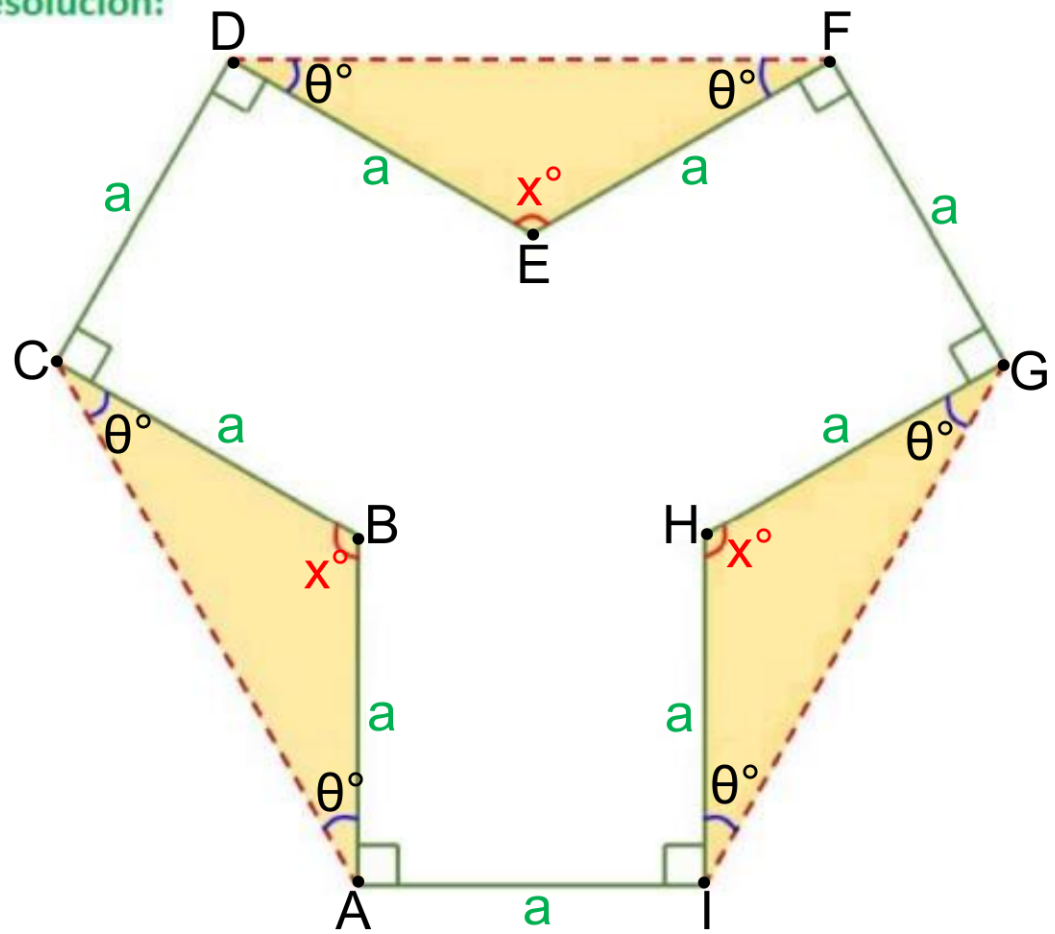
$$\therefore D = 135$$

EJERCICIOS

07. Se tiene un eneágono equilátero, donde seis de los ángulos son rectos y los otros tres son congruentes entre sí y miden x. Calcule x.

A) 100 B) 105 C) 110
D) 115 E) 120

Resolución:



Se pide: x

Los triángulos ABC, DEF y GHI son congruentes por el caso L-A-L

Por suma de ángulos en el hexágono ACDFGI:

$$6\theta + 6(90) = 180(6-2)$$

$$\rightarrow \theta = 30$$

Pero:

$$2\theta + x = 180$$

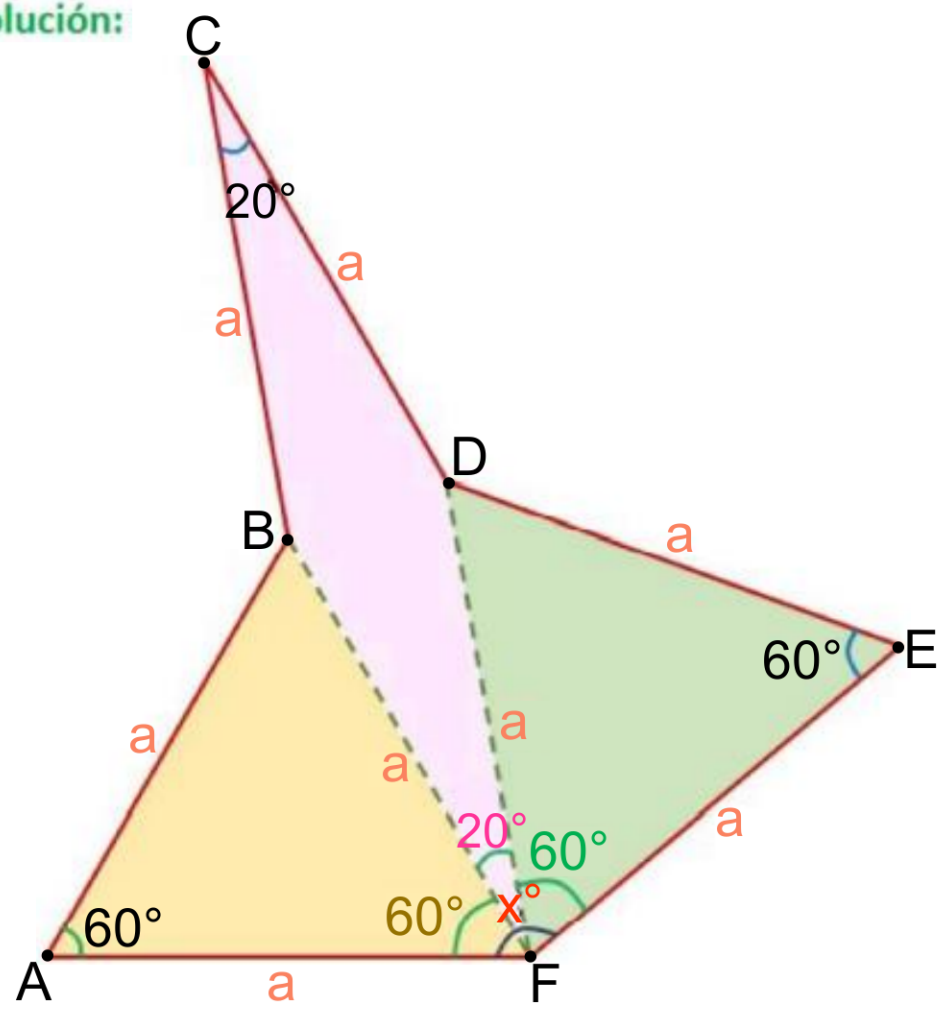
$$\therefore x = 120$$

EJERCICIOS

08. En un hexágono equilátero ABCDEF: m∠BCD=20, m∠FAB=m∠DEF=60 y m∠EFA=x. Calcule x.

A) 135 B) 140 C) 145
D) 150 E) 155

Resolución:



Se pide: $m\angle EFA = x$

Trazamos $\overline{BF}$ y $\overline{DF}$, luego:

ΔABF: Equilátero

$\rightarrow BF = a, \quad m\angle AFB = 60$

ΔFED: Equilátero

$\rightarrow DF = a, \quad m\angle EFD = 60$

□BCDF: Rombo

$\rightarrow m\angle BFD = 20$

Finalmente, en el punto F:

$$x = 60 + 20 + 60$$

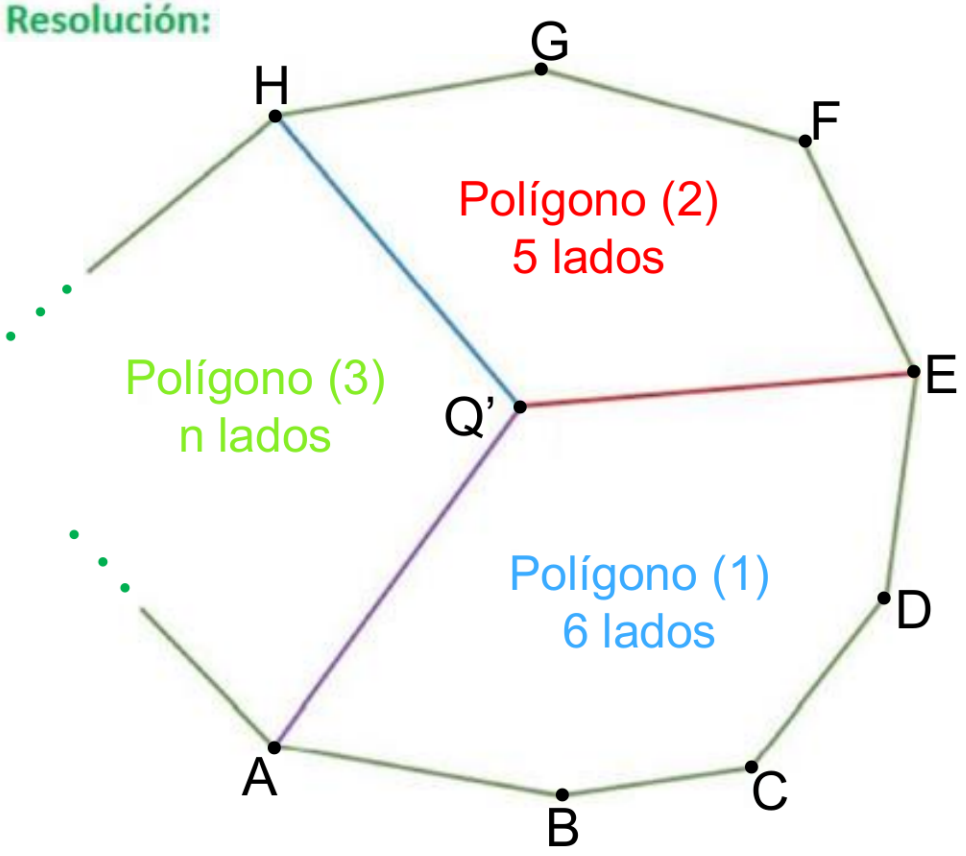
$$\therefore x = 140$$

EJERCICIOS

09. Q` es un punto del interior del polígono convexo ABCDEFGHI... . Si la suma de los números de diagonales de los polígonos ABCDEQ` y EFGHQ` es igual al número de diagonales del polígono AQ`HI ... , entonces la suma de las medidas de los ángulos del polígono AQ`HI ... es:

A) 720 B) 900 C) 1 080
D) 1 260 E) 1 440

Resolución:



Se pide: $S_{i(3)}$

Dato:

$$D_1 + D_2 = D_3$$

$$\frac{6(6-3)}{2} + \frac{5(5-3)}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$$

De donde:

$$n = 7$$

Finalmente:

$$S_{i(3)} = 180(n-2)$$

$$S_{i(3)} = 180(7-2)$$

$$\therefore S_{i(3)} = 900$$

EJERCICIOS

10. En un polígono regular cuyo semiperímetro es p, el número que expresa su perímetro es el mismo que el que expresa su número de diagonales. Además, la medida del ángulo interior es p veces la medida del ángulo exterior. Entonces, la longitud del lado del polígono es:

A) 1/5 B) 1/4 C) 1/3
D) 1/2 E) 1

Resolución:

Calcular "L" L: medida del lado

Datos: $p = \text{semiperimetro} = \dfrac{n.L}{2}$

$$\text{Perímetro} = D \ \ldots (I)$$

$$m\angle\text{Interior} = p(m\angle\text{Exterior}) \ldots (II)$$

$$\text{De (I)}: \quad 2p = \frac{n(n-3)}{2} \ldots\ldots (III)$$

$$\text{De (II)}: \frac{180(n-2)}{n} = p\left(\frac{360}{n}\right)$$

$$(n-2) = 2p \ldots\ldots\ldots\ldots (IV)$$

$$\text{(III)x(IV)}: \quad (n-2) = \frac{n(n-3)}{2}$$

$$0 = n^2 - 5n + 4$$
$$0 = (n-4)(n-1)$$

$$\Rightarrow n = 4$$

En (IV) $p = 1$

$$\Rightarrow 1 = \frac{4L}{2}$$

$$L = \frac{1}{2}$$

CLAVES

- **PARA LA CLASE:**

01	02	03	04	05
D	D	D	D	B

06	07	08	09	10
D	E	B	B	D

- **PARA EL ALUMNO:**

01	02	03	04	05
A	E	A	A	C

06	07	08	09	10
E	A	A	C	D

FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS